



**Marianne Grassmann / Klaus-Peter Eichler
Elke Mirwald / Bianca Nitsch**

Mathematik- unterricht

5

**Kompetent im Unterricht
der Grundschule**

herausgegeben von Astrid Kaiser und Susanne Miller

Kompetent im Unterricht der Grundschule

hrsg. von Astrid Kaiser und Susanne Miller

Band 5

Mathematikunterricht

Von

Marianne Grassmann / Klaus-Peter Eichler /

Elke Mirwald / Bianca Nitsch

4. unveränderte Auflage



Schneider Verlag Hohengehren GmbH

Umschlag: Gabriele Majer, Aichwald

Leider ist es uns nicht gelungen, die Rechteinhaber aller Texte und Abbildungen zu ermitteln bzw. mit ihnen in Kontakt zu kommen.

Berechtigte Ansprüche werden selbstverständlich im Rahmen der üblichen Vereinbarungen abgegolten.

Gedruckt auf umweltfreundlichem Papier (chlor- und säurefrei hergestellt).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN: 978-3-8340-2021-5

Schneider Verlag Hohengehren, Wilhelmstr. 13, D-73666 Baltmannsweiler

Homepage: www.paedagogik.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne vorherige schriftliche Einwilligung des Verlages öffentlich zugänglich gemacht werden. Dies gilt auch bei einer entsprechenden Nutzung für Unterrichtszwecke!

© Schneider Verlag Hohengehren, 73666 Baltmannsweiler 2020

Printed in Germany – WolfMediaPress, Korb

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Reihenherausgeberinnen	V
1. Zur Einführung – einige grundlegende Gedanken	1
2. Mathematische Kompetenzen	6
2.1 Mathematik	6
2.2 Neuere Wurzeln der Kompetenzdiskussion	10
2.3 Kompetenzdiskussion heute – Entstehung der Bildungsstandards	11
2.3.1 Zur Entstehung der Bildungsstandards	11
2.3.2 Zum Begriff Kompetenz	14
2.3.3 Kompetenzen und Bildungsstandards	15
2.3.4 Anforderungen der Bildungsstandards bezüglich der allgemeinen mathematischen Kompetenzen	21
3. Entwicklung inhaltsbezogener Kompetenzen	47
3.1 Kompetenzentwicklung im Fach Mathematik der Grundschule	47
3.2 Leitidee „Zahlen und Rechenoperationen“	48
3.2.1 Zur Sache	48
3.2.1.1 Zahlbegriff	48
3.2.1.2 Rechnen	52
3.2.2 Anregung zur Entwicklung inhaltlicher Kompetenzen	54
3.3 Leitidee „Raum und Form“	93
3.3.1 Geometrie als Teil des Mathematikunterrichts	93
3.3.2 Zur Sache	97
3.3.2.1 Räumliches Vorstellungsvermögen	97
3.3.2.2 Geometrische Begriffe	101
3.3.2.3 Geometrische Abbildungen	104
3.3.3 Anregung zur Entwicklung inhaltlicher Kompetenzen	109
3.3.3.1 Im Hinblick auf die Leitidee „Raum und Form“ zu erwerbende Kompetenzen	109
3.3.3.2 Sich im Raum orientieren – räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln	111

3.3.3.3	Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen	134
3.3.3.4	Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen	142
3.3.3.5	Handwerklich-praktische und gedanklich-theoretische Aspekte der Tätigkeit	149
3.4	Leitidee „Größen und Messen“	160
3.4.1	Zur Sache	161
3.4.2	Anregung zur Entwicklung inhaltlicher Kompetenzen	166
3.5	Leitidee „Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeiten“	188
3.5.1	Zur Sache	190
3.5.2	Anregung zur Entwicklung inhaltlicher Kompetenzen	197
3.6	Sachrechnen nicht mehr aktuell?	215
3.6.1	Zur Sache	216
3.6.2	Anregungen zur Gestaltung eines Sachrechnenlehrganges	218
3.7	Muster und Strukturen	238
3.7.1	Zur Sache	238
3.7.2	Anregung zur Entwicklung inhaltlicher Kompetenzen	241
3.7.2.1	Im Hinblick auf die Leitidee „Muster und Strukturen“ zu erwerbende Kompetenzen	241
3.7.2.2	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	242
3.7.2.3	Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	264
4.	Kompetenzen und kein Ende – einige abschließende Gedanken	267
4.1	Kompetenzentwicklung bei leistungsschwachen Kindern	268
4.2	Kompetenzentwicklung mathematisch talentierter Kinder	273
	Literatur	275

Vorwort der Reihenherausgeberinnen

Die Kompetenzdebatte ist aktuell. Ähnlich wie Anfang der 1970er Jahre die Lernzieldebatte das Nonplusultra didaktischen Denkens war, ist das schulpädagogische Feld nun mit Kompetenzforderungen übersät. Oft handelt es sich nur um einen Etikettenschwindel. Es wird etwas als Kompetenz formuliert, was sich lediglich auf ein enges kognitives Lernziel reduzieren lässt. Bildungspolitische Maßnahmen und Vorschläge sind voll von Kompetenzrhetorik. Es gilt als nicht zeitgemäß, wenn Richtlinien oder Kerncurricula nicht nach dem Kompetenzmodell formuliert werden. In diesem Denkdruck passiert es leicht, dass gar nicht „Kompetenzen drin sind, wenn Kompetenz drauf steht“.

Eine besonders dramatische Wendung nimmt der „Kompetenz-Zugzwang“ dann ein, wenn er letztlich nicht am Fördern der Lernenden orientiert ist, sondern als Vorwand für Selektion und Auslese dient. Denn pädagogischen Sinn können kompetenzorientierte Modelle von Lernstandards nur haben, wenn sie produktiv auf erweitertes Lernen ausgerichtet sind. Kindern sollen nicht immer die Defizite vor Augen geführt werden, sondern ihre Fortschritte. Doch in Deutschland besteht die Gefahr, dass aus Standards zu leicht Zensuren werden, die nicht als individuelle, unterstützende Leistungsrückmeldung verstanden werden, sondern eher Defizite aufzeigen. Diese Einschätzung wird gerade auch von Grundschullehrerinnen und -lehrern geteilt, die sich im Rahmen zahlreicher Reformkonzepte seit vielen Jahren recht erfolgreich um eine pädagogische Arbeit bemühen, die der Heterogenität ihrer Schülerinnen und Schüler gerecht wird. Sie stellen sich die berechtigte Frage, ob und wie diese Arbeit mit den geforderten Kompetenzen, Standards, Vergleichsarbeiten etc. vereinbar ist.

Auf der anderen Seite wird mit der Forderung nach dem Kompetenzerwerb häufig auch das grundlegende Ziel verfolgt, die eher „tote Wissensanhäufung“ zu überwinden und einen Beitrag zum selbstständigen, verantwortungsbewussten Handeln der Schülerinnen und Schüler mit hoher Selbst-, Sach- und Sozialkompetenz zu leisten. Hans Werner Heymann (2004, S. 7) fasst die seiner Ansicht nach unumstrittenen Chancen des neuen bildungspolitischen Trends rund um Bildungsstandards, Kompetenzen, Lernstandsüberprüfungen und Kerncurricula wie folgt zusammen: Die Beliebigkeit und föderale Zersplitterung schulischer Bemühungen werde eingedämmt; Unterricht könne sich stärker als bisher auf Wesentliches konzentrieren und das deutsche Schulsystem könne mit einem überprüfbareren Bildungsminimum der sozialen Ungleichheit entgegentreten. „Die Kompetenzorientierung steht für den Anspruch, dass die Ergebnisse schulischen Lernens handlungsrelevant, praktisch anwendbar sowie persönlich und gesellschaftlich bedeutsam sein sollen“ (Heymann 2004, S. 8).

Die sieben Bücher dieser Reihe rollen in diesem Sinne die Kompetenzfrage nicht administrativ oder selektiv auf, sondern wollen konstruktiv Beispiele aufzeigen,

wie Kinder tatsächlich in den sieben Fachbereichen kompetenter gemacht werden können. Hierzu bedarf es sämtlicher Fächer und Lernbereiche der Grundschule und nicht etwa nur derjenigen, für die bereits Bildungsstandards und Kompetenzmodelle entwickelt worden sind. Deshalb finden sich in der vorliegenden Reihe die Fächer Deutsch, Mathematik, Kunst, Musik, Englisch, Sachunterricht und Sport vertreten.

Um den formulierten Anspruch einlösen zu können, bedarf es spezifischer Lehrerkompetenzen, die durch die domänenspezifische theoretische wie auch praxisbezogene Auseinandersetzung über die Förderung und Unterstützung von Kindern in jedem einzelnen Band automatisch gestärkt werden. Trotz der hierdurch vorgenommenen domänenspezifischen Auslegung beruflicher Kompetenzen von Grundschullehrerinnen und -lehrern, können auch gemeinsame Kompetenzen formuliert werden. Ewald Terhart (2004, S. 10 f.) formuliert insgesamt fünf grundschulspezifische Lehrerkompetenzen, mindestens drei davon werden in der vorliegenden Reihe unmittelbar angesprochen:

- Die Fähigkeit zum konstruktiven Umgang mit der zunehmenden Heterogenität einschließlich der Entwicklung eines differenzierten und gemeinsamen Unterrichtskonzepts.
- Diagnostische Kompetenz im Sinne der Fähigkeit zum Erkennen von unterschiedlichen Lernbedürfnissen und Unterstützungsbedarfen.
- Die Fähigkeit zur Bereitstellung individualisierter Lernprozesse und Lernmöglichkeiten auf der Ebene einzelner Klassen, Lerngruppen und Zeiteinheiten.

Um Lehrerinnen und Lehrer zu unterstützen, diese vielfältigen Kompetenzen umzusetzen, wünschen wir dieser Reihe guten Erfolg.

Astrid Kaiser/Susanne Miller

Literatur

Heymann, Hans Werner (2004): Besserer Unterricht durch Sicherung von „Standards“? In: PÄDAGOGIK 56, Heft 6, S. 6–9

Terhart, Ewald (2004): Lehrerkompetenzen für die Grundschule – Kontext, Entwicklung und Bedeutung. Grundschule 6/ 2004, S. 10–12

1. Zur Einführung – einige grundlegende Gedanken

Einschlägige Untersuchungen wie (TIMSS, PISA, VERA) gaben in der Vergangenheit, aber auch in jüngster Zeit¹ wenig Anlass, mit dem Mathematikunterricht und seinen Ergebnissen zufrieden zu sein.

Das betrifft sowohl die Ergebnisse des Unterrichts in ihrer Gesamtheit als auch die von Bundesland zu Bundesland, von Schule zu Schule, ja selbst von Klasse zu Klasse anzutreffenden ungerechtfertigten² Unterschiede im Niveau des Unterrichts und seiner Ergebnisse. Der Wunsch, auf breiter Basis eine Grundqualität des Unterrichts herbeizuführen, ist allzu verständlich und führte letztlich zur Verabschiedung der Bildungsstandards. Dieser Wunsch ist nicht nur ein Wunsch von kultusministerieller Seite. Unzählige engagierte Lehrerinnen und Lehrer sind tagtäglich darum bemüht, jedem Kind eine optimale Entwicklung zu ermöglichen. Erste Früchte dieser Bemühungen werden in den verbesserten Leistungen in Vergleichsstudien sichtbar.

Das vorliegende Buch wendet sich in erster Linie an diese Lehrerinnen und Lehrer und soll die in den Bildungsstandards verankerten Vorgaben für die Praxis konkretisieren. Es soll eine Grundlage zur produktiven theoretischen Auseinandersetzung mit den Bildungsstandards sein und zugleich viele konkrete Anregungen für die Arbeit im Unterricht geben. Die Darstellungen können nur exemplarisch sein und wollen Chancen, aber auch Grenzen der Kompetenzdiskussion deutlich machen, welche durch die internationalen Vergleichsuntersuchungen und die von der KMK formulierten Bildungsstandards initiiert wurde. Sie sollen vor allem dazu anregen, immer wieder neu über den eigenen Unterricht unter dem Blickwinkel der optimalen Entwicklung jedes Kindes nachzudenken.

Zur Funktion des Mathematikunterrichts

Diskussionen über den Mathematikunterricht, seine Ziele und seine Ergebnisse sind nicht neu. Sie sind unverzichtbar, denn ohne ein ständiges Nachdenken, ohne Veränderungen gäbe es keine Entwicklung, keine Qualitätsverbesserung und vor allem keine Anpassung an veränderte Anforderungen und Rahmenbedingungen.

Von zentraler Bedeutung ist die Klärung der Funktion des Mathematikunterrichts, also die Antwort auf die Frage, mit welcher Intention Mathematik unterrichtet werden sollte. Die Antwort auf diese Frage ist wegweisend für alle Detailscheidungen, beispielsweise ob und in welchem Umfang Kinder die Verfahren des schriftlichen Rechnens erlernen sollten, ob, und wenn ja, mit welcher Intention Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule eingesetzt werden sollten.

¹ Vgl. die jüngst veröffentlichten Ergebnisse von TIMSS 2007.

² Dabei verleugnen wir nicht, dass es auf Grund unterschiedlicher Voraussetzungen und Bedingungen durchaus auch gerechtfertigte Unterschiede gibt.

In der Geschichte findet man unterschiedliche Antworten auf die Frage nach der Funktion mathematischer Bildung. Es gab Hochkulturen wie die der Maya, in denen nur wenige mathematisch gebildet waren. Adam Ries³ ist uns nur deshalb als Rechenmeister bekannt, weil zu seiner Zeit nicht jeder schriftlich rechnen konnte, sondern dies die Rechenmeister erledigten. Die Regeln der Bruchrechnung waren noch zu Zeiten von Ries und Melanchton⁴ der universitären Bildung vorbehalten.

Es gab stets Zeiten, in denen der Mathematikunterricht eher das Ziel der formalen (geistesbildenden, die Persönlichkeit formenden) Bildung hatte und Zeiten, in denen eher die materiale (auf die Bewältigung der „Rechenfälle des Lebens“ gerichteten) Bildung im Mittelpunkt stand. So betont beispielsweise Pestalozzi die formale Bildung als wichtigstes Ziel. Später trat an die Stelle des Primats der formalen das Primat der materialen Bildung und das erste Ziel des Rechenunterrichts wurde die Vorbereitung der „künftigen Bürger, Bauern und Soldaten“⁵ auf ihre Berufe. Eine solche Entwicklung – Ablösung von Extremen – findet man auch nach 1945, wo zunächst an den Rechenunterricht angeknüpft wurde und dann der „Sputnikschock“ zu einer Wissenschaftsorientierung einhergehend mit der Betonung formaler Bildung und zur „von oben“ verordneten Einführung der „Neuen Mathematik“ führte. Mit dem Scheitern dieser Reform⁶ fand wieder eine Gegenbewegung „back to the basics“ mit einer starken Gewichtung der materialen Bildung statt.

In engem Zusammenhang mit der Frage nach dem Verhältnis von formaler und materialer Bildung steht die Frage, ob der Mathematikunterricht vor allem an der Wissenschaft Mathematik oder an der Entwicklung des Kindes orientiert werden soll.

Johannes Kühnel hat zu Beginn des 20. Jahrhunderts den „Rechenunterricht“ einer umfassenden Kritik unterzogen und ein Konzept für seinen „Neubau“⁷ entworfen. Seine Feststellung: „Der Rechenunterricht ist seit jeher das Kreuz und Sorgenkind unserer Schule. Hier haben wir neben dem Rechtschreibunterricht die geringsten Erfolge erzielt.“ trifft offensichtlich noch heute zu, wenn man die Diskussionen um den Mathematikunterricht und seine Ergebnisse betrachtet.

Kühnel kritisiert, dass der damalige Rechenunterricht einseitig vom Standpunkt des gebildeten Erwachsenen konzipiert ist und dessen Bedürfnis nach Schematisierung irrtümlich auf das Kind überträgt. Diese Kritik untermauert Kühnel, wenn er feststellt, dass der Unterricht vom Stoffprinzip beherrscht wird und sich die Orientierung

³ (1492–1559), bekannt als Rechenmeister. Er verfasste u.a. „Rechenung auff der linihen und federn“ (1522), in dem er das Rechnen auf dem Rechenbrett und das Rechnen mit Ziffern im Positionssystem beschreibt sowie die „Coß“, ein Lehrbuch der Algebra.

⁴ 1497–1560, eigentlich Philipp Schwartzerdit, war Gelehrter, Dichter, Lehrbuchautor, wurde als „Praeceptor Germaniae“ (Lehrer Deutschlands) bekannt. Neben Martin Luther einer der Reformatoren.

⁵ Stiehl zitiert nach Radatz/Schipper (S. 31)

⁶ Extreme Proteste gipfelten in Aussagen wie z. B. „Mengenlehre macht krank“.

⁷ Kühnel, J. (1916); S. 43; 44

des Unterrichts durch „eine nicht geringe psychologische Kenntnislosigkeit“ auszeichnet. Kühnel betont, dass auch künftig Kenntnisse und Fertigkeiten wesentlich sind, hebt zugleich aber hervor, dass diese vom Schüler *erworben* werden müssen, dass das Tun des Schülers nicht mehr auf Empfangen, sondern auf Erarbeiten eingestellt sein muss und dass nicht Leitung und Rezeptivität, sondern Organisation des Lehrers und Aktivität des Schülers das Lehrverfahren der Zukunft kennzeichnen.

Ein Blick in den Unterrichtsalltag zeigt, dass diese Art des Unterrichts auch heute noch keineswegs selbstverständlich ist. Trotz vieler positiver Entwicklungen findet man zu häufig noch die Auffassung, dass die Kinder zunächst und in erster Linie einmal Rechnen (und dort vor allem das Anwenden vorgegebener Algorithmen) erlernen müssen, bevor dann die eigenständige Auseinandersetzung mit anspruchsvolleren mathematischen Inhalten möglich ist. In einem derartigen Unterricht lernen Kinder, eine Vielzahl von Aufgabentypen⁸ und -formen⁹ zu unterscheiden und prägen sich die jeweils passende Lösungsregel ein. So gibt es Kinder, die bei Aufgaben wie $63 - __ = 42$ sagen: „Wenn die zweite Zahl gesucht ist, muss man minus rechnen.“ und die dann bei Aufgaben wie $20 - __ = 50$ als Lösung die Zahl 30 angeben.

Nicht zuletzt an dieser Stelle wird durch die Umsetzung der Bildungsstandards eine Veränderung erwartet.

Die Funktion mathematischer Bildung, also der Zweck, mit dem Kinder mit Mathematik konfrontiert werden, hat unabhängig von der Altersstufe zwei untrennbar miteinander verbundene Seiten¹⁰:

Einmal befähigen die erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, Gewohnheiten und Einstellungen zur Beantwortung elementarer Fragen aus der Umwelt und aus der Mathematik und schaffen eine tragfähige Basis für erfolgreiches weiteres Lernen nicht nur im Fach Mathematik.

Zugleich besitzen mathematische Aktivitäten wesentliche Potenzen für die harmonische Entwicklung des Kindes. Das betrifft insbesondere

- das Wecken von Neugier und Interesse an mathematischen Tätigkeiten, Objekten und Fragestellungen,
- das Wecken der Freude an mathematischen Aktivitäten speziell und an entdeckendem Lernen generell,

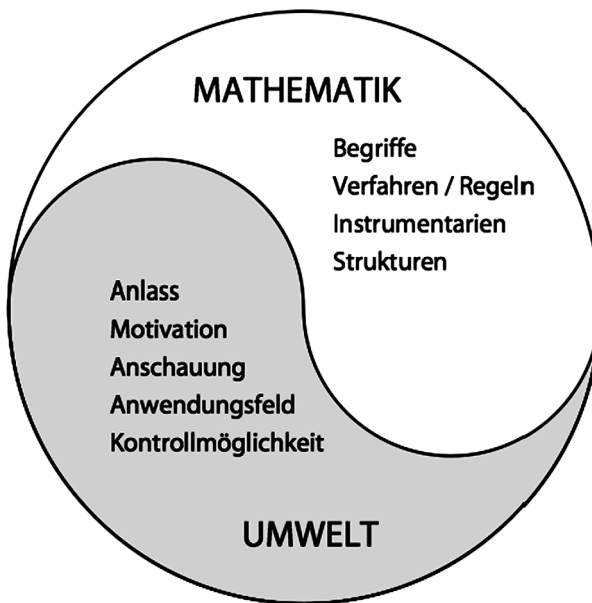
⁸ Unter Aufgabe im Sinne einer mathematischen Schüleraufgabe verstehen wir eine Aufforderung an das Kind zum Handeln, die es mit seinem mathematischen Wissen und Können lösen oder aber als unlösbar erkennen kann. Hier wird insbesondere das Problem der „Passung“ zwischen Anforderungen und subjektiven Voraussetzungen des Kindes deutlich: Was eine Aufgabe ist, hängt vom Löser ab. Der Terminus „Aufgabentyp“ widerspiegelt das mathematische Wesen einer Aufgabe. Aufgabentypen sind beispielsweise „Addition zweier zweistelliger Zahlen mit Überschreiten des Zehners“.

⁹ Der Terminus Aufgabenform widerspiegelt die Erscheinung einer Aufgabe. Aufgabenformen sind beispielsweise Terme, Tabellen, Zahlenmauern, usw.

¹⁰ vgl. Eichler (2008)

- die Förderung der Fantasie und der Kreativität,
- die Denk-, Gedächtnis- und Sprachentwicklung,
- die Befähigung zu und die Gewöhnung an ausdauernde, konzentrierte Lernarbeit,
- die Erziehung zu Genauigkeit, Sorgfalt und Eigenverantwortung und nicht zuletzt
- die Entwicklung sozialer Verhaltensweisen.

Auch wenn in der Grundschule die Mehrheit der Inhalte eine fundamentschaffende Funktion für erfolgreiches Weiterlernen besitzen: Gegenwärtig gewinnt der Mathematikunterricht seine Existenzberechtigung weniger denn je aus seinen stofflichen Inhalten, sondern vor allem aus den hier genannten Potenzen für die Entwicklung des Kindes. Diese Potenzen des Mathematikunterrichtes kommen allerdings nur dann zur Geltung, wenn die Kinder durch eine entsprechende Gestaltung des Unterrichts zu aktiv handelnden Subjekten ihrer Bildung gemacht werden können. Fanghänel stellt fest¹¹ „Wesentlicher als die Frage, *was* denn im Fach Mathematik unterrichtet werden sollte, ist es zu klären, *wie* dies zu geschehen hat“. Zweifellos sind Fragen nach der Auswahl und Anordnung des Stoffes, nach seiner Systematik und logischen Strenge wichtig. Den Vorrang aber müssen Überlegungen haben, wie alle Kinder in spezifischer Weise angesprochen und veranlasst werden können, sich geistig aktiv mit den angebotenen Inhalten auseinanderzusetzen.



Die Art und Weise der Aneignung mathematischer Inhalte entscheidet nicht zuletzt darüber, ob und wie den beiden Seiten der Funktion mathematischer Bildung Rechnung getragen wird. Zugleich wird deutlich, dass der Bezug zur Umwelt, also zur Lebenswirklichkeit des Kindes eine bedeutende Rolle spielt. Abbildung 1.1 zeigt dieses Verhältnis.

Im Mathematikunterricht Sinn zu stiften bedeutet, der Umwelt die genannten Funktionen zu geben. Erst mit einer mittelbaren oder

Abb. 1.1 Mathematik und Umwelt

¹¹ vgl. Fanghänel (2000)

unmittelbaren Beziehung zur Lebenswirklichkeit und der Anwendung dort ist das Erworbenes für den Lernenden sinnhaft und hat die Funktion eines Werkzeugs.

Entsprechend sollte der Erwerb mathematischer Erfahrungen aus der Perspektive der Kinder aufgebaut sein, sollte er die Alltags- und Umwelterfahrungen der Kinder berücksichtigen und dabei dennoch – und das ist Aufgabe der Lehrerin¹² – die Fachsystematik im Auge behalten (vgl. Schipper 2001)¹³. Das Kind findet seine Erfahrungen „aufgehoben“ und die Lehrerin weiß, welche langfristigen Ziele mit dieser oder jener Aktivität verfolgt werden. Es kann nicht um Kind- *oder* Fachorientierung gehen, sondern es muss vielmehr darum gehen, beide Seiten zusammenzubringen, also in den kindlichen Erfahrungen Elemente der Fachwissenschaft herauszufinden und *vom FACH aus* nach Anknüpfungspunkten zur kindlichen Entwicklung zu suchen.¹⁴

Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht erfolgt immer auf der Grundlage zu erreichender Ziele. Nachfolgend sollen deshalb die Ziele des Mathematikunterrichts entsprechend der Bildungsstandards dargestellt werden. Dazu wird zunächst der Begriff der Kompetenz näher untersucht. Anschließend werden im Mathematikunterricht zu erwerbende Kompetenzen näher beschrieben und systematisiert sowie Niveaustufen der Ausprägung dieser Kompetenzen dargestellt.

¹² Wenn hier und an anderer Stelle von Lehrerinnen gesprochen wird, mögen sich alle emanzipierten Lehrer ebenso angesprochen fühlen.

¹³ Schipper, W., S. 10–15)

¹⁴ vgl. z. B. Wittmann, E. Ch. (1996) S. 3–7

2. Mathematische Kompetenzen

2.1 Mathematik

Wer über mathematische Kompetenzen nachdenkt, muss zuerst klären, was unter Mathematik verstanden werden soll und wozu sie von Nutzen ist. Auf diese Frage nach dem Wesen von Mathematik gibt es verschiedene Antworten, die immer zugleich ein ganz bestimmtes von der subjektiven Erfahrung geprägtes Bild von Mathematik ausdrücken.

Das Wort Mathematik stammt vom altgriechischen mathán (ich lerne) ab. Ursprünglich aus der Untersuchung von Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstanden gibt es mittlerweile eine selbst für Mathematiker schwer zu überblickende Vielzahl von Spezialisierungen. So ist es verständlich, dass es keine allgemein anerkannte Definition gibt, welche beschreibt, was Mathematik ist und was nicht.

- Mathematik wird heute oft als eine Wissenschaft angesehen, die mehr oder weniger abstrakte Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.¹ Mathematik zu betreiben bedeutet damit, Strukturen, Muster, Regelmäßigkeiten zu entdecken, zu beschreiben und zu verallgemeinern. Dies ist ein auch für den Unterricht wesentlicher Aspekt von Mathematik.
- Mathematik ist auch ein **Werkzeug**, die Welt zu beschreiben². Dies ist der Aspekt der Anwendungsorientierung von Mathematik. Beutelspacher³ sieht die Anwendungsorientierung der Mathematik als eine besondere Weise, die Welt zu erfahren, **nicht** Formeln anzuwenden, sondern mit mathematischen Begriffen Strukturen und Zusammenhänge der Welt **zu erkennen**. So kann Mathematik beispielsweise helfen, die Schönheit der Welt z. B. in symmetrische Strukturen, Mustern, Parketten und Ornamenten zu erkennen und zu beschreiben.
- Nach Freudenthal⁴ ist Mathematik eine **Geisteshaltung**: „Mathematik ist eine Geistesverfassung, die man handelnd erwirbt und vor allem die Haltung, keiner Autorität zu glauben, sondern immer wieder „warum?“ zu fragen. Warum ist $3 \cdot 4$ dasselbe wie $4 \cdot 3$? Warum multipliziert man mit 100, indem man 2 Nullen anhängt? ... Es gibt nichts in der Welt, das so ohne Kritik akzeptiert wird wie Zahlen. Tausende, Millionen, Milliarden, Prozente und Punkte, Kilos und Tonnen – in der Zeitung, in Kommentaren und Diskussionen scheint das alles wie mit einer Einheitstunke übergossen. Glaube an die Unfehlbarkeit ist Aberglaube. Das Gegengift ist die Frage „Warum?““, eine geistige Haltung“.

¹ Vgl. z. B. Müller/Wittmann (2008)

² Vgl. z. B. Winter, H. (1982) Sachrechnen in der Grundschule und hier speziell seine Ausführungen zu den Funktionen des Sachrechnens

³ Beutelspacher, A. (1996), S. 11

⁴ Freudenthal, H. (1982), S. 140–142

- Mathematik ist zugleich eine **Sammlung von Ideen**. Man benötigt Ideen, um neue Sätze zu finden, Beweise zu führen oder auch nur um eine Aufgabe selbstständig zu lösen. Derartige Ideen können schwerlich gelehrt werden, sie müssen erlebt, ja gelebt werden. Das verlangt Zeit und Muße, sich auf mathematische Probleme einzulassen, zu versuchen, zu irren und zu korrigieren. Dieser Aspekt spielt in der aktuellen Diskussion eine nur geringe Rolle, ist aber für langfristig erfolgreiches Arbeiten im Unterricht von zentraler Bedeutung. Eine für die Mathematik und den Mathematikunterricht charakteristische Arbeitsweise besteht doch gerade darin, neue Aufgaben auf bereits bekannte Aufgaben zurückzuführen, selbständig Lösungsstrategien entwickeln.

Im Zentrum eines spiralförmig angelegten Mathematiklehrganges sollten deshalb **fundamentale Ideen**⁵ stehen, die an verschiedenen Stellen und aus unterschiedlichen inhaltlichen Perspektiven immer wieder aufgegriffen werden können und die dabei – gewissermaßen wie rote Fäden – die Vielfalt der Inhalte strukturieren. Die einzelnen Inhalte werden dann nicht mehr relativ isoliert behandelt, sondern sinnvoll miteinander vernetzt. Der einzelne Stoff, die einzelne Aufgabe muss dann nicht mit jedem Kind „zu Ende behandelt“ werden, denn mit den in den Aufgaben enthaltenen bzw. beim Bearbeiten der Aufgaben zum tragen kommenden fundamentalen Ideen werden die Kinder immer wieder konfrontiert. So kann Lernen für alle Kinder zum erfolgreichen Weiterlernen werden, kann der Heterogenität der Leistungsniveaus Rechnung getragen werden.

Den Bildungsstandards liegen folgende fundamentale Ideen, sogenannte **Leitideen**, zu Grunde:

Leitidee „Muster und Strukturen“

Zahlen und geometrische Objekte besitzen Beziehungen, die sich in Gesetzmäßigkeiten und Mustern widerspiegeln. Derartige Strukturen – und nicht etwa das pure Zahlenrechnen – sind der eigentliche Gegenstand der Mathematik. Den Kindern sind Muster aus der Vorschulzeit bekannt, sie erfassen deren Regelmäßigkeiten. Das Erfassen, Erkennen und Wiedererkennen von Mustern ist letztlich ein wichtiges Mittel der Erkenntnistätigkeit nicht nur in der Geometrie sondern gerade auch in der Arithmetik etwa bei der Bildung der Zahlworte, beim Übertragen bekannter Aufgaben oder beim Erfassen und Anwenden von Rechengesetzen.

Leitidee „Zahlen und Operationen“

Diese Leitidee widerspiegelt die Vielfalt der Aspekte des Zahlbegriffs. Kinder erleben Zahlen als Mittel zum Beschreiben quantitativer Seiten der Realität. Sie lernen dabei die verschiedenen Aspekte des Zahlbegriffs kennen und Zahlen dementsprechend zu verwenden.

⁵ In der Mathematik gibt es weitere fundamentale Ideen wie etwa die Idee der Symmetrie, die Idee der Beziehung von Teil und Ganzem oder die Idee der funktionalen Abhängigkeit.

Zum Beschreiben von Sachverhalten der Wirklichkeit lernen die Kinder Operationen kennen und nutzen.

Leitidee „Raum und Form“

Die Kinder erfassen unsere Umwelt als dreidimensionalen Raum. Ihre Auseinandersetzungen mit der Umwelt beinhalten damit stets eine Auseinandersetzung mit der Räumlichkeit der uns umgebenden Welt. Dies fordert und fördert u. a. Fähigkeiten zum räumlichen Wahrnehmen, Vorstellen und Darstellen bezogen auf Objekte, bezogen auf Lagebeziehungen zwischen Objekten und bezogen auf Prozesse.

Die Kinder erfassen, dass die Form von Objekten wesentlich über deren praktische Verwendbarkeit etwa beim Bauen, Legen, Auslegen usw. entscheidet. Sie klassifizieren Objekte nach ihrer Form.

Leitidee „Größen und Messen“

Kinder erfahren an vielen konkreten Beispielen, dass Objekte qualitative Eigenschaften (Länge, Fläche, Volumen, Farbe, Masse usw.) besitzen. Sie erfassen, dass einige dieser Eigenschaften quantitativ verglichen und gemessen werden können. Dazu erwerben sie Erfahrungen im Vergleichen und Messen sowie realistische Größenvorstellungen zu verschiedenen Größenarten.

Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“

In der Auseinandersetzung mit der Umwelt lernen die Kinder Daten zu erfassen, darzustellen und auszuwerten. Im Umgang mit zufälligen Ereignissen sammeln die Kinder Erfahrungen zu nichtdeterministischen Ereignissen.

Die *Konzentration auf fundamentale Ideen* bietet die Möglichkeit,

- Lernen als Weiterlernen zu gestalten, bei dem an vorhandene Erfahrungen angeknüpft und einmal Betrachtetes nicht als abgeschlossen angesehen wird,
- Inhalte in individuell unterschiedlicher Tiefe, vom zeitlichen Umfang her flexibel und methodisch variabel zu bearbeiten,
- der Leistungsheterogenität der Schüler einer Klasse durch differenzierende Förderung aller Schüler gerecht zu werden,
- dass sich die Schüler die Beziehungen zwischen den verschiedenen mathematischen Inhalten wie beispielsweise die Verbindung von Arithmetik und Geometrie erschließen sowie
- die vielfältigen Bezüge einzelner Inhalte zu außerunterrichtlichen Erfahrungen und den Inhalten anderer Fächer anwendungsorientiert zu nutzen.

Mathematik hat also eine Vielzahl von Facetten, kann gleichermaßen anstrengend wie faszinierend sein. Deutlich wird vor allem, dass wesentliche Aspekte mathematischer Bildung durch einen der allgegenwärtigen Tests zweifellos nicht erfasst und erst recht nicht „abgefragt“ werden können.

Dass im Unterricht von diesen Aspekten der Mathematik häufig zu wenig oder gar nichts bei den Lernenden ankommt, dass Kühnells Prinzipien den Unterricht selten oder nie erreichen, zeigen u. a. Bilder, die Studienanfänger der Grundschulpädagogik⁶ von ihrem Mathematikunterricht gezeichnet haben.

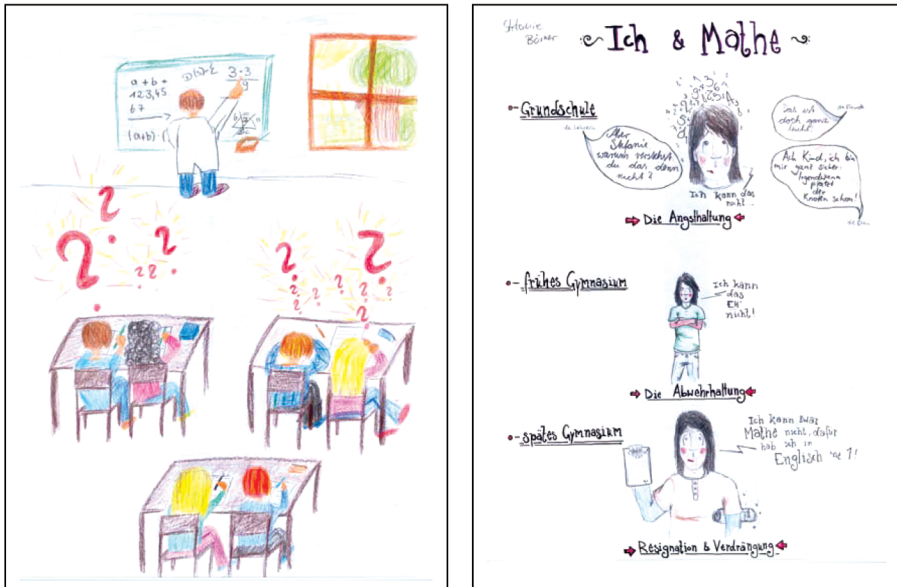


Abb. 2.1 Bilder vom Mathematikunterricht

Hier geht es offensichtlich nicht um aktive eigene Sinnkonstruktion, nicht um Verständnis und keinesfalls um die Ausbildung einer Geisteshaltung. Vielmehr geht es hier um Drill, um Reiz – Reaktionen – Muster, um das Einpauken unverständener Regeln. Wie kann man als Lehrerin die Kinder für Mathematik begeistern, wenn man von Angsthaltung bis hin zur Resignation alles in der Schule durchlitten hat?

Wer über Unterricht und Lernangebote für Kinder nachdenkt, kommt nicht umhin, sich selbst nach seiner Haltung zur Mathematik zu befragen und zu klären, welches Bild von Mathematik und Mathematikunterricht er besitzt und seinen Schülern wünscht. Die Bildungsstandards sollen nicht zuletzt dazu Anregungen geben.

Bevor wir uns dem Kompetenzbegriff und den Bildungsstandards für den Mathematikunterricht zuwenden, möchten wir interessante Wurzeln der aktuellen Entwicklung aufzeigen, die zum besseren Verständnis und zur Einordnung gegenwärtiger Diskussionen beitragen können.

⁶ Diese Bilder stehen stellvertretend für viele mit ähnlicher Aussage. Sie stammen von Studierenden, die in Berlin im Rahmen der Grundschulpädagogik den Lernbereich Mathematik studieren und später Mathematik in den Klassen 1 bis 4 unterrichten werden.

2.2 Neuere Wurzeln der Kompetenzdiskussion

Bereits in den 1970er Jahren formulierte Heinrich Winter *allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts*⁷. Winter formulierte für den Mathematikunterricht allgemeine, über den Inhalt hinausgehende Ziele, die nicht nur kognitive, sondern implizit auch soziale und affektive Ziele enthalten. Bei der Begründung dieser Ziele spielen sowohl fachmathematische Aspekte als auch Aspekte der Entwicklung des Lernenden eine Rolle. Winter fordert, bereits bei der Stoffauswahl zu beachten, inwieweit der Stoff dazu geeignet ist, möglichst vielen allgemeinen Lernzielen gerecht zu werden.

Winters allgemeine Lernziele beziehen sich auf

- die Entwicklung der **Argumentationsfähigkeit**, wobei aus unserer Sicht das in den Bildungsstandards gesondert aufgeführte Kommunizieren in diesem Ziel enthalten ist, denn es geht Winter um die Fähigkeit, sich mit anderen zu verständigen, aber auch um eine „Vorstufe“ des Beweisens. In diesem allgemeinen Lernziel sind vielfältige soziale Aspekte enthalten, denn Argumentation impliziert Zuhören, Akzeptieren oder begründetes Verwerfen anderer Meinungen ebenso wie den Mut, seine Gedanken zu äußern und zu verteidigen;
- die Entwicklung der **Kreativität**, wozu nach Winter auch das Suchen nach eigenen Lösungswegen, aber auch die Ausdauer, immer neue Wege auszuprobieren, gehört. Diese Aspekte werden in den Bildungsstandards beim Problemlösen mit erfasst;
- die Entwicklung der **Fähigkeit zum Mathematisieren**, die wir in den Bildungsstandards im Modellieren wieder finden;
- die Entwicklung der **geistigen Grundtechniken** Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren und Konkretisieren, Analysieren und Formalisieren, die in den Bildungsstandards zwar nicht explizit erwähnt werden, die aber eine Voraussetzung sind, um Mathematik selbstständig zu betreiben.

Die Bildungsstandards sind offensichtlich von Winters allgemeinen Lernzielen beeinflusst.

In eine ähnliche Richtung gehen Überlegungen zur Funktion des Mathematikunterrichts bzw. zu allgemeinbildenden Zielen des Mathematikunterrichts, die Härtig und Weber publizierten. So stellte Härtig bereits 1974 Überlegungen „zur Systematisierung des Inhalts von Mathematiklehrgängen“ zur Diskussion⁸, in denen Komponenten mathematischer Allgemeinbildung herausgearbeitet werden. Härtig stellt heraus, dass jeder Mathematikunterricht neben Faktenwissen auch auf die Entwicklung allgemeiner Denkweisen, die in der Mathematik eine zentrale Rolle spielen, zielt. Bei diesen Denkweisen findet sich – zur semantischen Denkweise gehörig – das Model-

⁷ Vgl. Winter, H. (1975)

⁸ Vgl. Härtig, K. (1974)

lieren. Auch das Argumentieren und Kommunizieren findet sich bereits damals in verschiedenen Aspekten, z. B. in der Forderung nach sprachlich-logischer Schulung⁹ wieder. Neben einer „normierten“ Ausdrucksweise wurde hier stets auch die Nutzung der Umgangssprache im Mathematikunterricht gefordert. Hervorzuheben ist, dass sowohl bei der sprachlich-logischen Schulung als auch in den anderen Bereichen immer langfristige Entwicklungen von Klasse 1 an angestrebt wurden.

Dieser Gedanke der langfristigen, kontinuierlichen, planmäßigen und systematischen Entwicklung ist bei der Umsetzung der Bildungsstandards zu berücksichtigen, gerade derzeit und angesichts der allgegenwärtigen Ungeduld. Härtig betont, dass zur mathematischen Allgemeinbildung auch Vorstellungskraft, Phantasie und Initiative gehören. Das sind Gedanken, die wir bei Winter unter Kreativität und in den Bildungsstandards beim Problemlösen und in inhaltlichen Leitlinien wieder finden. Schon damals wurde gefordert, immer wieder zu überlegen, welche Denkweisen und allgemeinbildenden Fähigkeiten am jeweils zu behandelnden mathematischen Inhalt entwickelt werden können und es wurde betont, dass im Unterricht keineswegs nur die Vermittlung von Faktenwissen und Fertigkeiten im Vordergrund stehen darf.

Die Ergebnisse internationaler Vergleichsuntersuchungen zeigen, dass diese Orientierungen seinerzeit und bis heute offensichtlich noch immer geringe Auswirkung auf den Unterricht haben.

2.3 Kompetenzdiskussion heute – Entstehung der Bildungsstandards

Im Folgenden soll zunächst kurz auf die Entstehung der Bildungsstandards speziell für Mathematik¹⁰ eingegangen werden.

2.3.1 Zur Entstehung der Bildungsstandards

Nachdem Deutschland zu Beginn der 1990er Jahre an TIMSS¹¹ teilgenommen hatte und die deutschen Schülerinnen und Schüler Leistungen in Mathematik und Naturwissenschaften erbrachten, die unter dem Durchschnitt lagen, hat sich die Diskussion um den Unterricht und seine Ergebnisse auch in der Öffentlichkeit deutlich verstärkt. Vermehrt wurde eine rasche Änderung gefordert.

Die getesteten deutschen Jugendlichen lagen insbesondere bei der flexiblen Anwendung ihres Wissens, beim Verknüpfen von Wissen aus unterschiedlichen Bereichen sowie in den Leistungen beim Problemlösen deutlich hinter den Leistungen der Spitzengruppe zurück. Stärken zeigen sie lediglich bei der Reproduktion von Wissen und der Ausführung einfacher Operationen. Auch wenn Deutschland an TIMSS – Grund-

⁹ Beispielsweise wurde Können im Beschreiben und Begründen auch unter Nutzung von Variablen angestrebt.

¹⁰ Für den Deutschunterricht vgl. die Ausführungen von Bartnitzky im ersten Band dieser Reihe.

¹¹ Third International Mathematics and Science Study, in der Neuauflage von 2007 als Abkürzung für „Trends in International Mathematics and Science Study“ verwendet.

schule nicht teilgenommen hat, ergab sich die Frage, ob Wurzeln für dieses Abschneiden bereits in der Grundschule gelegt werden, ob bereits im Grundschulmathematikunterricht eine „falsche“ Schwerpunktsetzung erfolgt. Die ersten Ergebnisse von PISA¹² und IGLU(E)¹³ bestätigten tendenziell diese Defizite, wenngleich sich in der IGLU (E) Studie die Grundschul Kinder sowohl im Lesen als auch im mathematischen Bereich im internationalen Vergleich besser platzieren konnten als die Sekundarstufenschüler.

Es kann nicht befriedigen, wenn fast 20% der Kinder zum Ende der Klasse 4 im Hinblick auf das weitere Lernen von Mathematik als gefährdet eingestuft werden müssen, weil sie nur über elementarste mathematische Grundfähigkeiten verfügen. Unbefriedigend ist auch, dass zwar die Spitzengruppe durchaus im internationalen Vergleich mithalten kann, zu den leistungsfähigsten Schülerinnen und Schülern einiger anderer Länder aber immer noch ein beträchtlicher Abstand besteht.¹⁴

Diese Befunde wurden mit den Ergebnissen von TIMSS 2007 und 2011 unterstrichen.¹⁵ Zwar lagen die Ergebnisse der deutschen Grundschul Kinder mit 525 (2007) bzw. 528 (2011) Punkten über dem jeweiligen internationalen Durchschnitt (473 bzw. 491 Punkten), aber dennoch verfügten sowohl 2007 als auch 2011 immerhin ein Fünftel der getesteten Kinder aus Deutschland allenfalls über elementares, rudimentäres mathematisches Wissen, das nicht ausreicht, um in weiterführenden Schulen erfolgreich Mathematik zu lernen. 4% (2007) bzw. 3% (2011) der Kinder erreichen nur die unterste Kompetenzstufe und demgegenüber auch nur 6% (2007) bzw. 5% (2011) die höchste Kompetenzstufe 5. Demgegenüber gelingt es den Staaten der internationalen Leistungsspitze sowohl den Anteil der Kinder in den untersten Kompetenzstufe geringer zu halten, als auch die Potenziale von leistungsstarken Kinder besser auszuschöpfen. Die Forderung von 2007 „... zukünftig die gemeinsame Förderung leistungsschwacher und leistungsstarker Kinder noch besser in Einklang zu bringen“¹⁶ ist folgerichtig und muss aufrechterhalten werden, denn 2011 stellen die Autoren fest, dass „... in Bezug auf die Förderung der leistungsschwachen ... und insbesondere auch der sehr leistungsstarken ... Schülerinnen und Schüler kaum Veränderungen zu verzeichnen sind.“¹⁷

Zwei weitere Ergebnisse von TIMSS 2007, die auch 2011 festgestellt werden mussten, besitzen bildungspolitische Brisanz und sollten Anlass zum Nachdenken sein:

Deutschland gehört zu dem Drittel der TIMSS-Teilnehmerstaaten, in denen zu beiden Testzeitpunkten die Jungen in den Mathematikleistungen signifikant besser abschneiden als die Mädchen. Insbesondere finden sich deutlich weniger Mädchen als

¹² Program for International Students assessment

¹³ Internationale-Grundschul-Lese-Untersuchung, die in Deutschland mit ergänzenden Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben durchgeführt und bei der einige der TIMSS-Items verwendet wurden.

¹⁴ Bos, W. u. a. (Hrsg. 2003), S. 224

¹⁵ Vgl. Bos, W. u. a. (Hrsg.) (2008) und (2012)

¹⁶ Vgl. Bos, W. et al. (Hrsg.) (2008) S. 11

¹⁷ Vgl. Bos, W. et al. (Hrsg.) (2012) S. 17

Jungen in der Kompetenzstufe 5 und deutlich mehr Mädchen als Jungen in der Kompetenzstufe 1.¹⁸ International dagegen können diese Unterschieden nicht bestätigt werden.¹⁹

Zum anderen haben beide Vergleichsuntersuchungen wiederum den engen Zusammenhang zwischen Kompetenzentwicklung der Kinder und sozialer Herkunft bestätigt.

Aus diesen Ergebnissen kann nicht geschlossen werden, dass nur die leistungsschwächeren sowie die leistungsstarken, begabten Kinder einer besseren Förderung bedürfen. Vielmehr bedarf es einer besseren Grundqualität des gesamten Unterrichts ausdrücklich für alle Kinder. Auch jene Kinder, die „gute“ bis „befriedigende“ Ergebnisse erreichen, haben ein Recht auf Förderung. Im Interesse der Entwicklung aller Kinder aber auch im gesellschaftlichen Interesse eines Landes, dessen Wirtschaftskraft auf der Verarbeitung und wertsteigernden Veredlung von Erzeugnissen beruht, ist es zwingend erforderlich, **allen** Kindern, unabhängig von Geschlecht und sozialer Herkunft, eine möglichst gute mathematische Bildung zu ermöglichen.

Eingedenk dessen und der Ergebnisse dieser internationalen Vergleichsuntersuchungen wurde von politischer Seite mit der Einführung verbindlicher Standards in den Fächern Deutsch und Mathematik sowie mit der Einführung auch nationaler Vergleichsarbeiten reagiert. Auf die mit dieser Output-Orientierung verbundenen Gefahren im Falle einer Überbetonung dieses Outputs wird im Folgenden noch hinzuweisen sein.

Bemerkenswert an den bildungspolitischen Maßnahmen nach PISA war, dass die Grundschule und die vorschulische Bildung in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit rückten. Dabei standen Maßnahmen zur Förderung der sprachlichen Entwicklung vor allem im Vorschulbereich im Mittelpunkt. Tests zur Sprachstandserhebung und Programme zur sprachlichen Förderung findet man mittlerweile in allen Kindertageseinrichtungen. Für mathematische Frühförderung gibt es entsprechende Programme bisher erst in Ansätzen²⁰. Hier hat erst in den letzten Jahren eine intensive Forschungs- und Entwicklungsarbeit eingesetzt.

Das Hervorhebenswerte dieser Entwicklung ist, dass es der KMK gelang, landesweite Tests (VERA) zu initiieren sowie verbindliche Bildungsstandards für die Fächer Deutsch und Mathematik jeweils für das Ende der Jahrgangsstufe 4²¹ und für den mittleren Schulabschluss festzulegen. In vergleichsweise kurzer Zeit wurden

¹⁸ Ebenda S. 218

¹⁹ Noch dramatischer stellen sich die geschlechtsspezifischen Unterschiede im Bereich der Naturwissenschaften dar, wo der Vorsprung der Jungen noch deutlicher ausfällt. Im Vergleich zu den teilnehmenden OECD und EU-Ländern treten nur in der tschechischen Republik diese Unterschiede in den Naturwissenschaften ähnlich dramatisch auf. Bos, W. (2012) S. 21

²⁰ Wobei eine Vielzahl dieser Programme bewährte Traditionen ignorieren, weder fachlich noch didaktisch fundiert sind, sondern lediglich eine Marktlücke bedienen. So werden beispielsweise Zahlen mystifiziert, wird empfohlen, freundlich zu Zahlen zu sein, weil dann die Zahlen ihrerseits auch freundlich sind.

²¹ In den meisten Bundesländern fällt dieser Zeitpunkt mit dem Ende der Grundschulzeit zusammen.

kleine Kommissionen gebildet, die in weniger als 18 Monaten diese Standards erarbeiteten.

Die vorliegenden Standards sind damit gewissermaßen Ausdruck einer „Reform von oben“. Vergleichsweise anders verlief die Entwicklung der „Principles and Standards for School Mathematics“ des NCTM in den USA. Hier gab es einen mehrjährigen Prozess öffentlich geführter Diskussionen unter Beteiligung zahlreicher Wissenschaftler und Lehrer.

Wenn die mit den Standards beschlossenen Reformen den angestrebten Erfolg haben sollen, sind sie im alltäglichen Unterricht umzusetzen. Das vorliegende Buch soll dazu beitragen, indem nachfolgend herausgearbeitet wird,

- was mit den Bildungsstandards erreicht werden soll,
- was das für die Weiterentwicklung des Unterrichts Positive der Standards ist und
- wie ein Unterricht gestaltet werden kann, der diese Standards berücksichtigt.

Die generellen theoretischen Aussagen sollen durch praktikable Beispiele illustriert werden und Anregung zu eigenem Ausprobieren sein. Das Hauptkettenglied für den Erfolg des Unterrichts ist die Lehrerin mit ihrer tagtäglichen Unterrichtsgestaltung. Mit ihr steht und fällt der Erfolg der Umsetzung der Bildungsstandards. Es kommt darauf an, Gutes und Bewährtes zu erhalten, Neues auszuprobieren, Erfahrungen auszutauschen sowie Dinge, die verallgemeinerungswürdig und zugleich übertragungsfähig sind, hervorzuheben, es geht also nicht darum, davon auszugehen, dass alles bisherige falsch oder schlecht war.

2.3.2 Zum Begriff Kompetenz

Bei der Formulierung der Bildungsstandards wird von zu entwickelnden bzw. zu erwerbenden Kompetenzen gesprochen. Ein kurzer Blick zur Klärung des Begriffs „Kompetenz“ ist unverzichtbar²², weil ohne begriffliche Klarheit nicht entschieden werden kann, was es heißt, Kinder in Mathematik kompetent zu machen.

Ist Kompetenz mehr als nur ein neues Wort für bekannte Sachverhalte, also nicht nur „alter Wein in neuen Schläuchen“? Ist es eine neue didaktische Kategorie, mit der es sich mit Blick auf den Unterricht lohnt, auseinanderzusetzen?

Das Wort „Kompetenz“ kommt vom lateinischen Wort „Competere“, was soviel bedeutet wie zusammentreffen, passen, ausreichen, zu etwas fähig sein: Anforderung und Kind „treffen zusammen“, sie „passen“. Ein Kind ist kompetent, eine bestimmte Tätigkeit auszuführen.

Damit wird ein wesentliches Moment von Kompetenzen deutlich: Kompetenzen äußern sich in Tätigkeiten, in denen ein Kind Leistungsanforderungen bewältigt. Sie werden erworben, um in dieser oder jener Situation handlungswirksam zu werden.

²² Vgl. auch Ausführungen von Barnitzky im ersten Band dieser Reihe.

Die Ergebnisse schulischen Lernens sollen nach Heymann handlungsrelevant praktisch anwendbar sowie persönlich und gesellschaftlich bedeutsam sein.²³

In Anlehnung an Weinert²⁴ verstehen wir unter Kompetenzen die bei Individuen **auf der Basis von Kenntnissen**²⁵ verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten zum Lösen von Problemen und Aufgaben sowie die damit verbundenen motivationalen, affektiven und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Lösungen in variablen Situationen erfolgreich herbeizuführen und verantwortungsvoll nutzen zu können.

Solide Kenntnisse sind eine unverzichtbare Basis des Kompetenzerwerbs und damit Grundlage erfolgreichen Handelns, aber allein längst nicht hinreichend. Kompetenz kann nicht auf Kenntnisse reduziert werden, sondern steht für **vernetztes, anwendbares Wissen**, das dem Handelnden als solches **bewusst** ist. Es kann also als intentional verfügbares Handlungsvermögen bezeichnet werden.

Dieser Kompetenzbegriff kann in seiner Allgemeinheit keine Grundlage für die Gestaltung konkreten Unterrichts sein, er ist fachspezifisch auszugestalten. Kompetenzen sind immer konkret und können nur anhand konkreter Fachinhalte erworben werden. Nachfolgend soll das den Bildungsstandards zugrunde liegende Kompetenzmodell detailliert und fachspezifisch dargestellt werden.

2.3.3 Kompetenzen und Bildungsstandards

Als Ergebnis der oben beschriebenen Entwicklung wurden am 15.10.2004 von der Kultusministerkonferenz „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ beschlossen.

Der Begriff „Bildungsstandards“ in seiner Kombination aus Bildung und Standard zwingt zum Nachdenken darüber, was mit Standard gemeint ist, was standardisiert werden kann und soll: Kann man Bildung standardisieren? Ist Bildung nicht etwas ganz Individuelles und die Gesellschaft eröffnet ihren Mitgliedern, insbesondere den Schülerinnen und Schülern *Bildungsmöglichkeiten*? Sollen unsere Kinder die Grundschule mit einer „Standardausstattung“ verlassen? Alle mit derselben Standardausstattung, auf demselben Niveau?

Auch wenn die Standards gleichzeitig für Unterrichtsentwicklung und Leistungsüberprüfung nutzbar sein sollen, ist eine „Normierung“ der Kinder sicher nicht gemeint. Zwar fehlt im Titel des Beschlusses der KMK das Wort „Kompetenzen“, doch es wird gleich im ersten Absatz festgestellt, dass die Förderung der mathemati-

²³ Heymann (2004)

²⁴ Weinert, Franz E. (2002), S. 27/28

²⁵ Kenntnisse sind individuelle Abbilder der objektiven Realität. Als Ergebnis kognitiver Prozesse existieren sie in Form von Vorstellungen, Begriffen, Urteilen usw. Schon Pippig (1980) weist darauf hin, dass Kenntnisse nicht an sich im menschlichen Bewusstsein existieren, sondern immer in Verbindung mit Fähigkeiten, Fertigkeiten, Einstellungen und anderen Komponenten, die für ihre Aneignung relevant sind.

schen Kompetenzen ein wesentlicher Bestandteil des Bildungsauftrages der Schule ist.

Im Vordergrund der Standards stehen nicht die traditionellen Sachgebiete des Mathematikunterrichts der Grundschule, sondern vielmehr allgemeine und inhaltsbezogene Kompetenzen, die für das Mathematiklernen und die Mathematik charakteristisch sind. Die traditionellen Sachgebiete sind dadurch allerdings keineswegs inaktuell. Weil es ein gesichertes Forschungsergebnis²⁶ ist, dass das Ausmaß des Vorwissens der erklärungskräftigste Faktor für den Erfolg beim Lernen ist, sind Kenntnisse über Begriffe, Verfahren und Zusammenhänge auch weiterhin im Unterricht zu sichernde *Grundlagen des Kompetenzerwerbs*.

Die folgende Grafik gibt einen Überblick über die in den Bildungsstandards genannten Kompetenzen. Dort werden inhaltsbezogene und allgemeine Kompetenzen unterschieden²⁷.

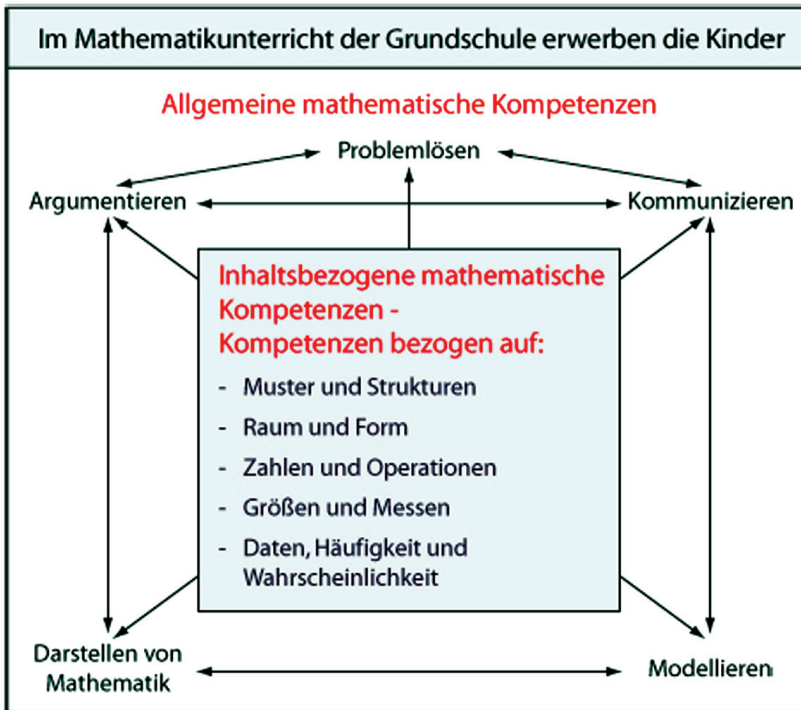


Abb. 2.3.1 Kompetenzen – Übersicht

²⁶ Vgl. die Ergebnisse der Scholastik-Studie

²⁷ Eine derartige Unterscheidung in inhaltsbezogene und allgemeine Kompetenzen ist in den Kompetenzbereichen für Deutsch nicht zu finden. Den allgemeinen mathematischen Kompetenzen entsprechen dort Methoden und Arbeitstechniken, die analog zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen erworben werden sollen.

Aus inhaltlicher Sicht gibt es die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche, die den oben genannten Leitideen entsprechen.

- Muster und Strukturen
- Raum und Form
- Zahlen und Operationen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Hierbei ist anzumerken, dass der Bereich „Muster und Strukturen“ sowohl im weiten Sinne, also mit Blick auf die Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen, als auch im engen Sinne mit Blick auf Muster zum Beispiel in der Arithmetik oder in der Geometrie gefasst werden kann. Die Leitidee „Muster und Strukturen“ ist also eher übergeordnet, als dass sie gleichberechtigt neben den anderen Inhaltsbereichen steht.

Entsprechend muss sich die Kompetenz eines Kindes im Hinblick auf die Arbeit an Mustern und Strukturen im weiten Sinne auch in anderen Inhaltsbereichen äußern.

Der Inhaltsbereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ ist inhaltlich überschritten mit den Inhaltsbereichen „Arithmetik“ (wenn es um die Bestimmung von Anzahlen beispielsweise von Kombinationen geht) und „Größen“ (wenn Zufallsgrößen betrachtet werden). Es handelt sich hier auch um einen Teilbereich des traditionellen Sachrechnens, der bisher in der Grundschule vernachlässigt wurde, auf den die Bildungsstandards in besonderer Weise orientieren wollen.

Dementsprechend können Aufgaben oft – und das zeigen auch die Auswertungen der bisherigen PISA Studien²⁹ – nicht trennscharf genau einem Inhaltsbereich zugeordnet werden.

Beim Arbeiten an diesen Inhaltsbereichen, bei der Aneignung mathematischer Inhalte erwerben die Kinder allgemeine, übergreifende mathematische Kompetenzen (prozessbezogene mathematische Kompetenzen).

Diese werden in ihren unterschiedlichen Facetten und Ausprägungen beim Bearbeiten von Aufgaben sichtbar, denn Kompetenzen werden, wie bereits erwähnt, nur in der Tätigkeit nachgewiesen. Dabei ist zu beachten, dass nicht die Aufgabe an sich eine bestimmte Anforderung an die Kompetenz des Kindes stellt, sondern erst in der Art und Weise ihrer Bearbeitung (unterschiedliche) Kompetenzen sichtbar werden.

Die Pfeile in der Grafik verdeutlichen, dass die zu entwickelnden allgemeinen Kompetenzen eng miteinander verwoben sind. Auch die inhaltsbezogenen und die allgemeinen mathematischen Kompetenzen stehen in enger Wechselbeziehung. Der Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen hängt vom Inhalt und ganz wesentlich von der Art seiner Aneignung und damit von der Unterrichtsgestaltung ab.

²⁹ vgl. Bender, Peter (2007) Was sagen uns PISA & Co, wenn wir uns auf sie einlassen? In: Jahnke, Th.; Meyerhöfer, W. (Hrsg.) PISA&CO – Kritik eines Programms, 2. Auflage, Franzbecker, S. 281–338

Vorhandene allgemeine mathematische Kompetenzen forcieren die Entwicklung inhaltsbezogener Kompetenzen.

Ob Kinder am Ende der Klasse 4 über die angestrebten Kompetenzen verfügen, sollen sie bei Lösen von Aufgaben in außer- und innermathematischen Kontexten unter Beweis stellen.

Im Folgenden sollen die einzelnen Kompetenzen und ihre Ausprägungsgrade genauer erläutert werden. In den Bildungsstandards werden 3 Anforderungsniveaus unterschieden:

Diese Anforderungsbereiche beziehen sich auf Aufgaben, deren Lösung auf einem bestimmten Weg vom Kind Kompetenzen auf entsprechender „Niveaustufe“ erfordert. Folgende Anforderungsbereiche für Aufgaben werden formuliert.

Anforderungsbereich „Reproduzieren“ (AB I)

Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routine-tätigkeiten.

Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ (AB II)

Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.

Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ (AB III)

Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Die Formulierung „das Lösen der Aufgabe“ ist die klare Orientierung auf den Lösungsweg. Kinder können Kompetenzen dadurch nachweisen, dass sie Aufgaben unter Nutzung eines bestimmten Lösungsweges lösen. ***Eine Aufgabe kann damit prinzipiell nicht a priori einem bestimmten Anforderungsbereich zugeordnet werden. Wesentlich ist vielmehr, auf welchem Wege das Kind die Aufgabe bearbeitet.*** Dieser Weg ist beispielsweise abhängig von den Voraussetzungen des Kindes, von dessen Kenntnissen, von seiner Lösungserfahrung: Die Aufgabe $6 \cdot 8$ beispielsweise sollte für ein Kind am Ende des ersten Halbjahres der Klasse 3 lediglich ein Reproduzieren von Kenntnissen sein, also zum AB I gehören. In Klasse 2, in der Phase der *Erarbeitung* von Grundaufgabengleichungen³⁰ der Multiplikationen erfordert die gleiche Aufgabe das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen, ist also AB II.

³⁰ Grundaufgaben der Addition bzw. Multiplikation sind alle Aufgaben mit zwei einstelligen Summanden bzw. Faktoren. Grundaufgaben der Subtraktion bzw. Division sind die entsprechenden Umkehraufgaben von Grundaufgaben der Addition bzw. Multiplikation.